

8.13) Assuming normality

1. $H_0: \sigma^2 \geq 0.01$ vs $H_1: \sigma^2 < 0.01$

2. statistical test

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

3. reject

$$\alpha = 0.1$$

$$\chi_{5,0.9} = 1.61$$

$$R_{0.1} =]0; 1.61[$$

4. reject ...

5. decision

$$n=6$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 7.9 \times 10^{-6}$$

$$\chi_{0.95}^2 = 0.0039 \in R_{0.1} \text{ logo reject } H_0 \text{ para } \alpha = 0.1$$

R: Os dados evidenciam que a variabilidade é inferior a 0,01 ohm².

8.14) H_0 : A amostra é eletrônica vs H_1 : A amostra não é eletrônica

2. statistical test $Z = \frac{V - \frac{2n-1}{3}}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}} \sim N(0,1)$

3. reject

$$\alpha = 0.05$$

$$Z_{0.025} = 1.96$$

$$R_{0.05} =]-\infty; -1.96] \cup]1.96; +\infty[$$

4. reject ...

5. decision

•	+	-	+	-	+	•	-	+	+
-	-	-	+	+	•	-	-	+	-
+	•	-	+	-	+	+	-	+	+
-	-	-	+	-	-	-	+	+	-

$$V_{0.95} = 24$$

$$n = 37$$

$$Z_{0.95} = -0.13 \notin R_{0.05} \text{ logo não rejeitar } H_0 \text{ para } \alpha = 0.05$$

$$p\text{-value} \approx 2P(Z \leq -0.13) = 2(1 - \Phi(0.13)) = 0.896\% > 0.05$$

8.15)

1. $H_0: X \sim B(5, 0.25)$ vs $H_1: X \neq B(5, 0.25)$

2. Estadística teste

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \stackrel{\text{so } H_0}{\sim} \chi^2_{k-p-1}$$

Valores	O_i	p_i	$E_i = 5 \cdot p_i$
0	4		11,8652
1	21		19,7754
2	10		13,1836
3	13	15	4,3945
4 no mais	2		0,7324
	50	1	50

Assumindo H_0 verdadeira, $X \sim \text{Bin}(5, 0.25)$

$$p_1 = P(X=0) = \binom{5}{0} 0,25^0 \times 0,75^5 = 0,237305$$

$$p_2 = \binom{5}{1} 0,25^1 \times 0,75^4 = 0,395502$$

$$p_3 = \binom{5}{2} 0,25^2 \times 0,75^3 = 0,263772$$

$$p_4 = 0,087891$$

$$p_5 = P(X \geq 4) = 0,014648$$

$$k = 4$$

3. região rejeição

$$\alpha = 0.05$$

$$\chi^2_{3, 0.05} = [7,81, +\infty[$$

4. região rejeição

5. decisão

$$\chi^2_{obs} = 25,12, \text{ logo rejeita } H_0 \text{ para } \alpha = 0.05$$

$$n = 5$$

$$k = 4$$

b) $p\text{-value} \approx P(\chi^2 > \chi^2_{obs}) = 1 - P(\chi^2 < 25,12) < 0,05$

8.16) 1. H_2^+ a single electron vs H_2 a pair of electrons

a) 2. Esthetische teste

$$Z = \frac{V - \frac{27-1}{3}}{\frac{\sqrt{16n-24}}{20}} \sim N(0,1) \text{ so } H_0$$

3. tegiu egiu

$$x = 0.05$$

$$3.025 = 1,64$$

$$R_{0.05} =]-\infty; -1,64[\cup]1,64; +\infty[$$

4. begin reject

S. dragoo

+	+	+	+	-	-	-	+
+	+	-	+	-	+	-	-
+	-	-	+	-	+	+	-
-	+	-	+	+	-	-	-

$$V_{GS} = 20$$
$$n = 35$$

$z_{obs} = -1,24 \notin R_{0.05}$, logo $\text{no reject } H_0$
para $\alpha = 0.05$

$$p\text{-value} = 2P(Z < -1,24) = 2(1 - \Phi(1,24)) = 0,215 > 0,05$$

b) $H_0: X \sim \text{Exp}(0, 5)$ vs $H_1: X \sim \text{Exp}(0, 8)$

$$\text{no de Klasse} = 1 + \frac{\log(n)}{\log(2)} \approx 6$$

$$\frac{38 - 0,1}{6} = 6,32 \rightarrow \text{amplitude da classe}$$

$$\begin{array}{c} 6 \\ \hline]0; 6,42[\\]6,42; 12,74[\\ \vdots \end{array} \quad \left| \quad \left| \quad \left| \right.$$

Assumendo μ_0 come vdd, $X \sim \text{Exp}(0, 1)$ $\hat{\lambda} = \bar{x} = 8,74$

$$p_1 = P(X \leq 6,42) = \int_{-\infty}^{6,42} f(x) dx = 1 - e^{-\frac{6,42}{2,74}} = 0,5201$$

param $K=3$ e $p=1$ formos

Statistic teste $\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{r-p-1}$ ab H_0

para $\alpha = 0.1$, a região de rejeição é

$$R_{0.1} =]\chi^2_{1,0.1}; +\infty[$$

$$\chi^2_{1,0.1} = 2,71$$

Decisão

$\chi^2_{obs} = \dots = 0,01985 \notin R_{0.1}$, logo não rejeitamos H_0 para $\alpha = 0.1$

$$p\text{-value} = P(\chi^2 > \chi^2_{obs}) = 1 - P(\chi^2 \leq 0,01985) \approx 1 - 0,3 = 0,7 > 0,1$$

$$8.17) 1. H_0: X \sim N(3, 2^2) \quad \text{vs} \quad H_1: X \sim N(3, 2^2)$$

$$1 + \frac{\log(30)}{\log(2)} \approx 6 \text{ classes}$$

$$\frac{6,28 - (-0,33)}{6} \approx 1,1 \text{ de simplificado}$$

	a_i	P_i	$G_i = 30P_i$
$]-\infty; 0,77]$	2,9	0,1314	3,942
$]0,77; 1,87]$	7	0,1529	4,587
$]1,87; 2,97]$	8		6,231
$]2,97; 4,07]$	6		6,402
$]4,07; 5,17]$	5,7		4,701
$]5,17; +\infty[$	2		4,137

$$k = 4$$

2. região rejeição

$$\alpha = 0.05$$

$$\chi^2_{2,0.05} = 5,99$$

$$R_{0.05} =]5,99; +\infty[$$

3. regressão...

4. decisão

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 0,936 \notin R_{0.05} \text{ logo não rejeitamos } H_0 \text{ para}$$

$$\alpha = 0.05$$

Assumindo H_0 válida, $X \sim N(3, 2^2)$

$$P(X \leq 0,77) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq -1,115\right) = 0,1314$$

$$P(0,77 < X \leq 1,87) = P(Z < -0,565) = 0,1314 = 0,1529$$

$$P(1,87 < X \leq 2,97) = 0,13077$$

$$P(2,97 < X \leq 4,07) = 0,2134$$

$$P(4,07 < X \leq 5,17) = 0,1567$$

8.18) 1. $H_0: X \sim N(2, \sigma^2)$ vs $H_1: X \neq N(2, \sigma^2)$

$$1 + \frac{\log(30)}{\log(2)} \approx 6$$

$$s = 1,4838$$

$$\frac{5,3 - 0,2}{6} = 0,85$$

Assumindo H_0 válida, $X \sim N(2, \sigma^2)$

	O_i	E_i
$]-\infty; 1,05]$	9	7,833
$]1,05; 1,9]$	4	6,33
$]1,9; 2,75]$	4	6,627
$]2,75; 3,6]$	9	4,947
$]3,6; 4,45]$	2	2,718
$]4,45; +\infty[$	2	1,485

$$P_1 = P(X \leq 1,05) = 0,2611$$

$$0,4721$$

$$P_2 = P(1,05 < X \leq 1,9) = 0,211$$

$$0,6950$$

$$P_3 = P(1,9 < X \leq 2,75) = 0,2229$$

$$0,2599$$

$$P_4 = P(2,75 < X \leq 3,6) = 0,1649$$

$$0,9505$$

$$P_5 = P(3,6 < X \leq 4,45) = 0,0906$$

$$P_6 = P$$

$$K = 4$$

2. Estatística teste

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{K-p-1}$$

3. região rejeição

$$\alpha = 0,01$$

$$\chi^2_{2, 0,01} = 9,21$$

$$R_{0,01} =]9,21; +\infty[$$

4. região crítica

5. decisão

$$\chi^2_{obs} = 3,73 \notin R_{0,01} \text{ logo não rejeitar } H_0 \text{ por } \alpha = 0,01$$

$$8.19) 1. H_0: x \sim F$$

$$-s \quad H_1: x \not\sim F$$

	O_i	E_i
$]0, 0,25]$	11	13,125
$]0,25, 0,5]$	13	9,375
$]0,5, 0,75]$	5	5,625
$]0,75, 1[$	1	1,875

$$k=3$$

2. Estatística teste

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{k-p-1}$$

Assumindo H_0 verdadeira; $x \sim F$

$$p_1 = P(x \leq 0,25) = 0,4375$$

$$p_2 = P(0,25 < x \leq 0,5) = F(0,5) - F(0,25) = 0,3125$$

$$p_3 = F(0,75) - F(0,5) = 0,1875$$

3. regra rejeitar

$$\alpha = 0,05$$

$$\chi^2_{0,05} = 5,99$$

$$R_{0,05} =]5,99; +\infty[$$

4. regra rejeitar

5. decisão

$\chi^2_{obs} = 2,05$ & $R_{0,05}$ logo não rejeitar H_0 para $\alpha = 0,05$

9.1) b) a recta de regressão é dada por

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \beta_1 x$$

$$\text{onde } \hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \text{ e } \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \text{ com } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ independentes}$$

$$\text{com } S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = 127,714$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 149,557$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 30,1429$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 11,2714$$

$$\text{Assim temos } \hat{\beta}_0 = -24,027 \text{ e } \hat{\beta}_1 = 1,171$$

pois que a recta de regressão estimada é

$$\hat{y} = -24,027 + 1,171x$$

$$c) R^2 = \hat{\beta}_1^2 \frac{S_{xx}}{S_{yy}} = 0,88$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = 197,909$$

com 0,88 é um valor próximo de 1 (>0,8) revela um bom ajuste do modelo de regressão linear aos dados

$$d) 1. H_0: \beta_1 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \beta_1 \neq 0$$

2. estatística teste

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \stackrel{H_0}{\sim} t_{n-2}$$

3. região rejeição

$$\alpha = 0,05$$

$$t_{2,0,025} = 2,18$$

$$R_{0,05} =]-\infty; -2,18] \cup]2,18; +\infty[$$

4. regra rejeição : rejeitar H_0 para um nível de significância α se $t_{obs} \in R_\alpha$

5. dados

$$n = 14$$

$$\hat{\beta}_1 = 1,171$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{yy} - \hat{\beta}_1^2 S_{xx}}{n-2} = 1,8985$$

$$t_{obs} = 9,604 \in R_{0,05} \text{ logo rejeita } H_0 \text{ para } \alpha = 0,05$$

esta decisão está de acordo com a alínea c)

Como a correlação ajusta bem as variáveis entre si é impossível o declive ser 0. Se fosse zero não existiria correlação entre as variáveis

$$e) \hat{y}_{30} = -24,027 + 1,171 \times 30 = 11,103h$$

como 40 > 34 que é maior que o intervalo de variação de x então não é possível estimar

9.2) a) A recta de regressão é dada por

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

onde $\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ e $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$

$$\text{Com } S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} = 129602,3278$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 = 3558909,111$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 = 5004,2444$$

Assi - temos $\hat{\beta}_1 = 0,0364$ e $\hat{\beta}_0 = -4,04902$

pelo que a recta é

$$\hat{y} = -4,04902 + 0,0364 x$$

$$R^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} S_{yy}} = 0,943$$

Como o valor quadrado de 1 (0,8) demonstra um bom ajuste do modelo aos dados.

b)

1. Estatística pivot $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}$

2. para um nível de confiança 95%.

$$\alpha = 0.05$$

$$P(-t_{n-2, \alpha/2} < T < t_{n-2, \alpha/2}) = 0.95$$

3. extração do intervalo

$$-t_{n-2, \alpha/2} < \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} < t_{n-2, \alpha/2} \Leftrightarrow \hat{\beta}_1 - t_{n-2, \alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} < \beta_1 < \hat{\beta}_1 + t_{n-2, \alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}$$

4. para a amostra observada

$$t_{9, 0,025} = 2,36$$

$$\hat{\beta}_1 = 0,0364$$

$$IC_{95\%}(\beta_1) =]0,028; 0,044[$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{yy} - \hat{\beta}_1^2 S_{xx}}{n-2} = 41,262$$

c) Uma vez que o valor 0 não pertence ao intervalo de confiança a 95% para β_1 , podemos dizer que para um teste bilateral

$$H_0: \beta_1 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \beta_1 \neq 0,$$

a um nível de significância de 5% a decisão será rejeitar H_0 ao nível de significância 5%.

9.3) a) A recta de regressão é dada por

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

$$\text{onde } \hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\text{Com } S_{xy} = \dots = 10,92$$

$$S_{xx} = \dots = 26,8$$

$$S_{yy} = \dots = 4,708$$

$$\text{Assim temos } \hat{\beta}_1 = 0,407 \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_0 = 2,279$$

pois que a recta é

$$\hat{y} = 2,279 + 0,407x$$

$$R^2 = \hat{\beta}_1^2 \frac{S_{xx}}{S_{yy}} = 0,943$$

Como R^2 é um valor próximo de 1 ($\geq 0,8$) mostra um bom ajuste dos dados ao modelo.

b) Que quanta mais campos de futebol existir nas proximidades da residência dos casais mais divórcios tendem a existir. Ou seja o nº de campos de futebol está ligado ao nº de divórcios

c) 1. $H_0: \beta_1 = 0$ vs $H_1: \beta_1 \neq 0$

2. Estatística teste $\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}$

3. região de rejeição

$\alpha = 0.1$

$t_{3, 0.05} = 2,35$

$R_{0.1} =]-\infty; -2,35] \cup [2,35; +\infty[$

4. regra rejeição ...

5. Decisão

$n = 5$

$\hat{r}^2 = \frac{SQR}{n-2} = 0,0862$

$t_{0.05} = 7,17 \in R_{0.1}$ logo rejeitar

H_0 para $\alpha = 0.1$

$\hat{\beta}_1 = 0,407$

que está de acordo com a)

d) $\hat{y}_3 = 2,279 + 0,407 \times 3 = 3,5$

Extra

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	4	5	10	15	20	25
Y_i	100	150	250	320	650	810	1040	1480

a) $R^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}S_{yy}}$, com

$S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} = 29300$

$S_{xx} = \dots = 522$

$S_{yy} = \dots = 1668000$, então $R^2 = 0,986$

b) 1. $H_0: \beta_1 = 0$ vs $H_1: \beta_1 \neq 0$

2. Estatística teste

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \sim t_{n-2} \text{ sob } H_0$$

3. região rejeição

$$\alpha = 0.05$$

$$t_{6, 0.025} = 2.45$$

$$R_{0.05} =]-\infty; -2.45] \cup]2.45; +\infty[$$

4. região rejeição ...

5. decisão

$$n=8$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_{yy} - \hat{\beta}_1^2 S_{xx}}{n-2} = 3897,19 \quad ; \quad \hat{\beta}_1 = 56,13$$

$t_{obs} = 20,54 \in R_{0.05}$ logo rejeita H_0 para $\alpha = 0.05$

c) 1. Estatística teste $T = \frac{\sqrt{n S_{xx}}}{\sqrt{\sum x_i^2}} \cdot \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}} \sim t_{n-2}$

2. para um nível de confiança 95%

$$\alpha = 0.05$$

$$P(-t_{6, 0.025} < T < t_{6, 0.025}) = 0.95$$

3. extremos do intervalo

$$-t_{n-1, \alpha/2} < \frac{\sqrt{n S_{xx}}}{\sqrt{\sum x_i^2}} \cdot \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}} < t_{n-1, \alpha/2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta}_0 - t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{n S_{xx}}{\sum x_i^2}}} < \beta_0 < \hat{\beta}_0 + t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{n S_{xx}}{\sum x_i^2}}}$$

4. para a amostra observada.

$$-t_{6, 0.025} = -2.45 \quad ; \quad \hat{\beta}_0 = 10,63$$

$$IC_{95\%}(\beta_0) =]-78,05 \quad 99,31[$$

$$f) T = \frac{\hat{y}_0 - y_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right)}} \sim t_{n-2}$$

$$I_{95\%}(y_0) = \left[\hat{y}_0 - t_{n-2, \alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right)}, \hat{y}_0 + \dots \right]$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\hat{y}_0 = \hat{y}_{(14)} = 796,45$$

$$t_{6, 0.025} = 2,45$$

$$I_{95\%}(y_0) =] 592,5 ; 920,4 [$$